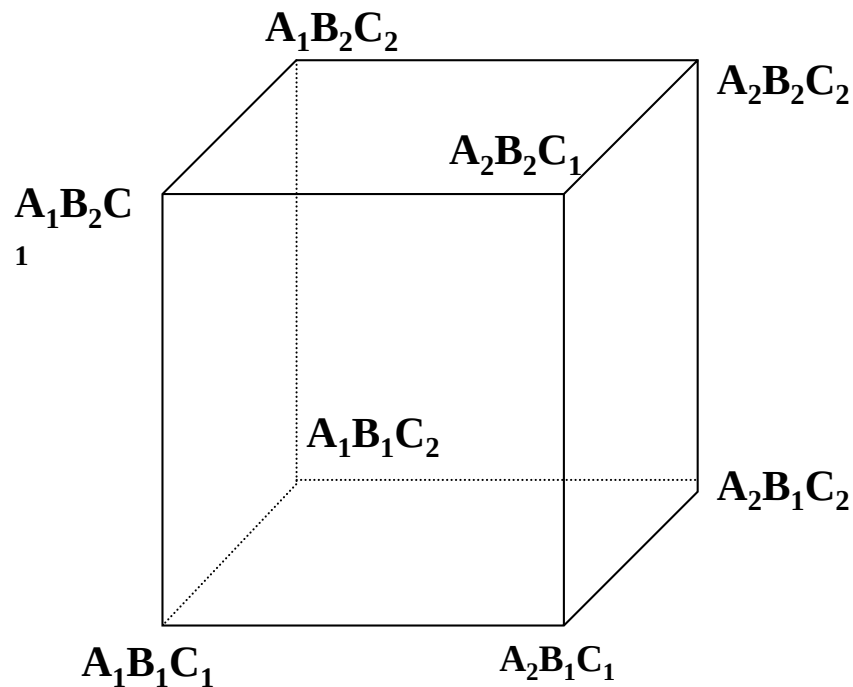
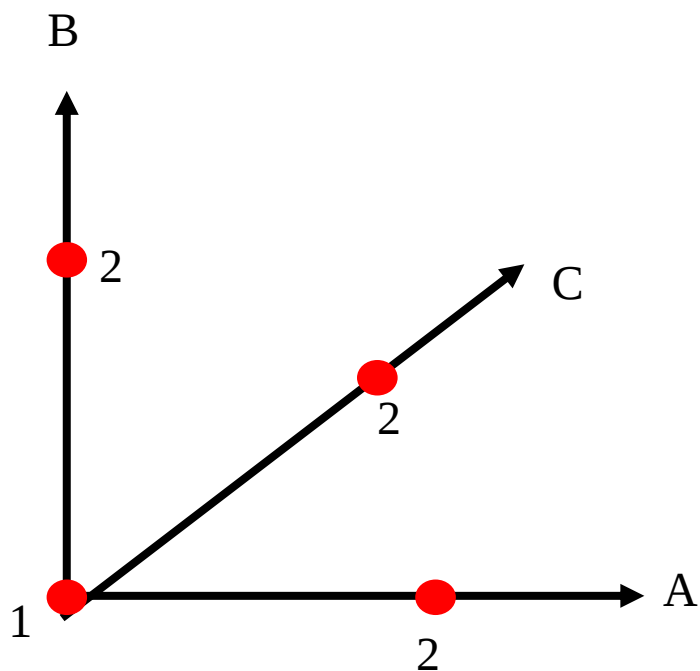




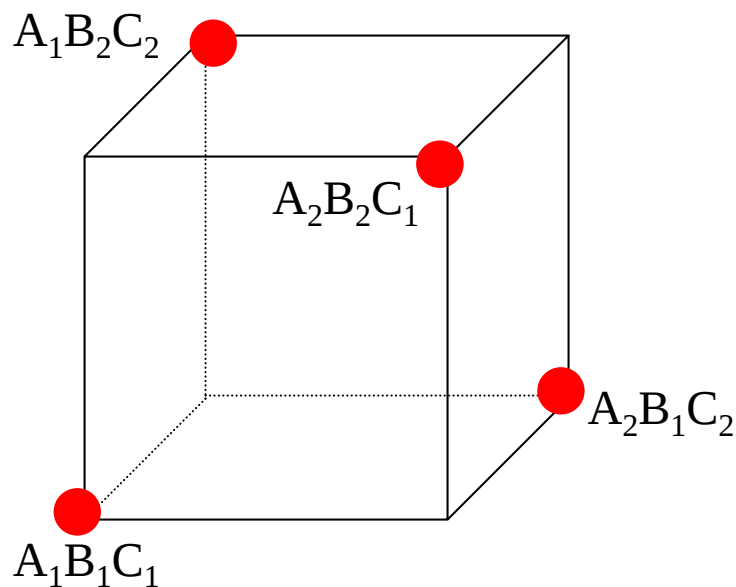
正交设计

三因素2水平

		A_1	A_2
B_1	C_1	$A_1B_1C_1$	$A_2B_1C_1$
	C_2	$A_1B_1C_2$	$A_2B_1C_2$
B_2	C_1	$A_1B_2C_1$	$A_2B_1C_1$
	C_2	$A_1B_2C_2$	$A_2B_2C_2$



四个顶点的组合



	A_1	A_2
B_1	C_1	C_2
B_2	C_2	C_1

由4个顶点所组成的试验，
三个因素的每个水平都均匀地包含于其中

这四个组合均匀地分布在立方体中：

- (1) 每个面都有2个点
- (2) 每条线上都有1个点

把上述4个点整理成一个表格

列号 试验号	A	B	C
1	1	1	1
2	2	1	2
3	1	2	2
4	2	2	1

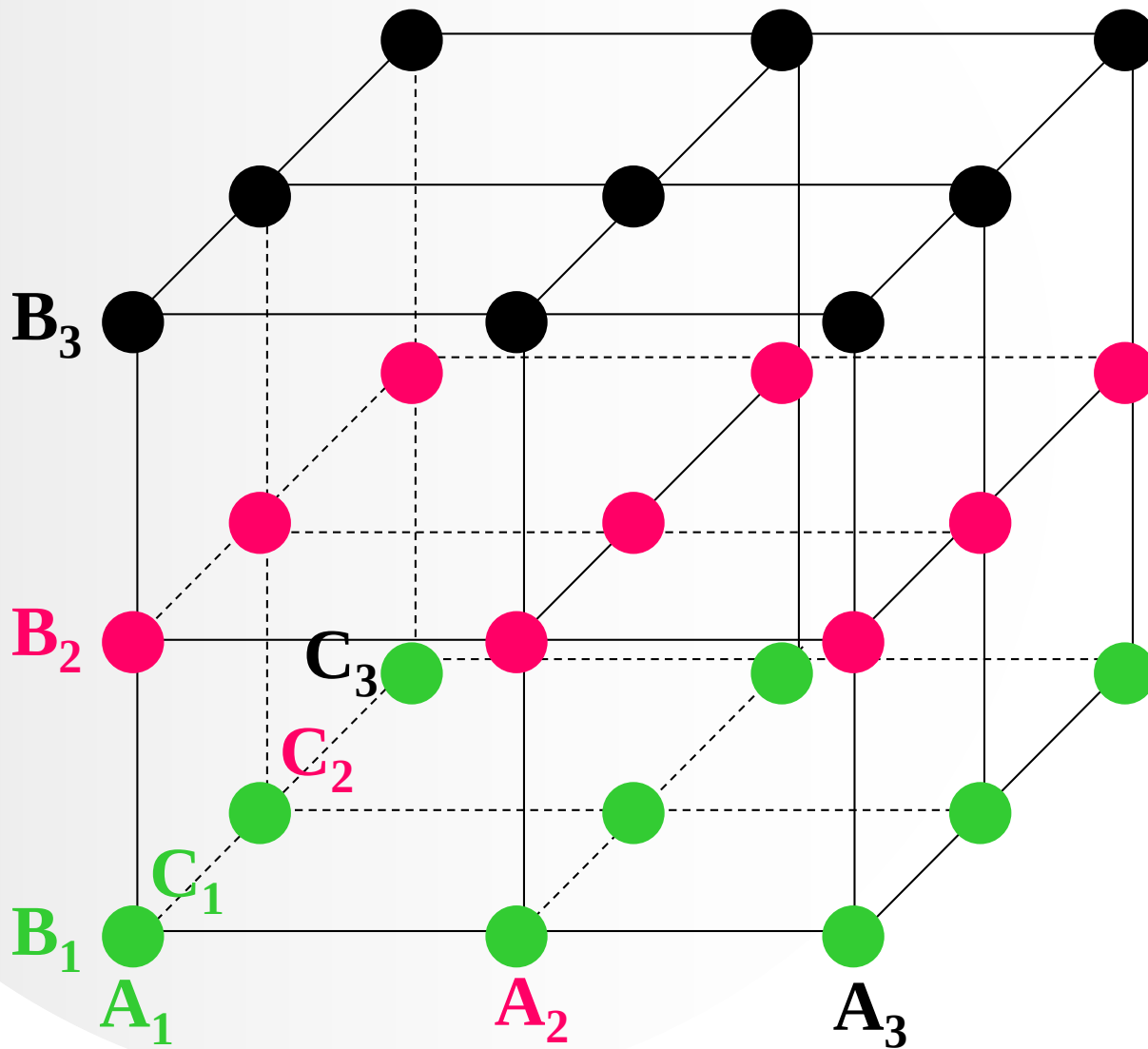
$L_4(2^3)$ 正交表

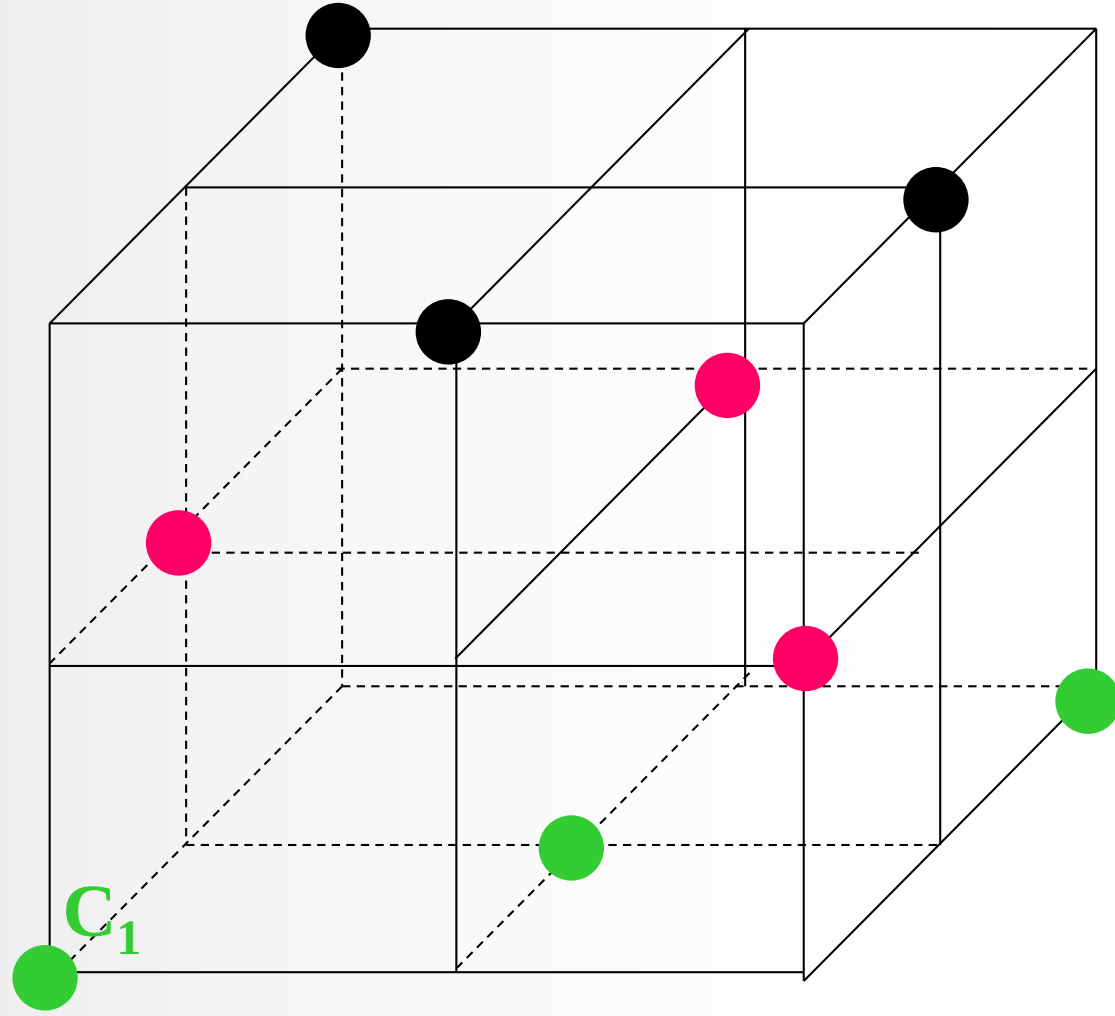
(1) 每一列（因素）中，不同的数字（代表因素的水平）都出现，且出现的次数相等

(2) 任意两列中，同一行的两个数字所组成的有序数字对，出现的次数相等



三因素3水平







由9个点所组成的试验，三个因素的每个水平都均匀地包含于其中。这9个组合均匀地分布在立方体中：

(1) 每个面都有3个点

(2) 每条线上都有1个点



		C1	C2	C3
A1	B1	A1B1C1	A1B1C2	A1B1C3
	B2	A1B2C1	A1B2C2	A1B2C3
	B3	A1B3C1	A1B3C2	A1B3C3
A2	B1	A2B1C1	A2B1C2	A2B1C3
	B2	A2B2C1	A2B2C2	A2B2C3
	B3	A2B3C1	A2B3C2	A2B3C3
A3	B1	A3B1C1	A3B1C2	A3B1C3
	B2	A3B2C1	A3B2C2	A3B2C3
	B3	A3B3C1	A3B3C2	A3B3C3

九个点的组合

	A_1	A_2	A_3
B_1	C_1	C_2	C_3
B_2	C_2	C_3	C_1
B_3	C_3	C_1	C_2



把上述9个点整理成一个表格

试验号	因素(列号)			
No.1	1	1	1	1
No.2	1	2	2	2
No.3	1	3	3	3
No.4	2	1	2	3
No.5	2	2	3	1
No.6	2	3	1	2
No.7	3	1	3	2
No.8	3	2	1	3
No.9	3	3	2	1

$L_9(3^4)$ 正交表



正交表及其特点

(1) 每一列中，不同的数字（代表因素的不同水平）出现的次数相等

如上表的每一列中的不同数字 1, 2, 3 均出现三次。

(2) 任意两列中，同一行的两个数字所组成的有序数字对，出现的次数相等

如 $L_9(3^4)$ 的第一列与第二列的同一横行的有序数字对

(1 1)、(1 2)、(1 3)

(2 1)、(2 2)、(2 3)

(3 1)、(3 2)、(3 3)

均各出现 1 次



(1) **均匀分散性**。在正交表的每一列中，不同数字出现的次数相等。

(2) **整齐可比性**。对于正交表的任意两列，将同一行的两个数字看作有序数字对，则每种数字对出现的次数相等。

这两个特点正是正交表的**正交性**的表现。正交表的列与列之间具有正交性。正交性可以保证每两个因素的水平在统计学上是不相关的。

什么是**正交性**？请百度之.....



实验设计,刘文卿2005,p65-66

在得到一张正交表后,人们可以通过三个**初等变换**得到一系列**与它等价**的正交表:

- (1) 正交表的**任意两列之间可以相互交换**,这使得**因素可以自由安排在正交表的各列上**
- (2) 正交表的**任意两行之间可以相互交换**,这使得**实验的顺序可以自由选择**
- (3) 正交表的**每一列中不同数字之间可以任意交换**(称为水平置换),这使得**因素的水平可以自由安排**



正交设计的基本概念

简言之，

正交设计就是利用正交表
来合理安排和分析多个因素
的试验方法



$L_8(2^7)$ 正交表

实验号	列 号						
	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2



$L_9(3^4)$ 正交表

试验号	因素(列号)			
No.1	1	1	1	1
No.2	1	2	2	2
No.3	1	3	3	3
No.4	2	1	2	3
No.5	2	2	3	1
No.6	2	3	1	2
No.7	3	1	3	2
No.8	3	2	1	3
No.9	3	3	2	1



正交表符号的含义

正交设计

列数，表示最多允许
安排的因素之个数

$$L_n(q^k)$$

正交表的行数，
也即实验次数

因素的水平数



混合水平的正交表

$L_{18}(2^1 \times 3^7)$

1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	2	2	2	2	2
1	1	3	3	3	3	3	3
1	2	1	1	2	2	3	3
1	2	2	2	3	3	1	1
1	2	3	3	1	1	2	2
1	3	1	2	1	3	2	3
1	3	2	3	2	1	3	1
1	3	3	1	3	2	1	2
2	1	1	3	3	2	2	1
2	1	2	1	1	3	3	2
2	1	3	2	2	1	1	3
2	2	1	2	3	1	3	2
2	2	2	3	1	2	1	3
2	2	3	1	2	3	2	1
2	3	1	3	2	3	1	2
2	3	2	1	3	1	2	3
2	3	3	2	1	2	3	1



正交表的类型

第一类,正交表行数为 n ,列数为 p ,水平数是 q ,满足以下条件($k=2,3,4,\dots$):

$$n = q^k \quad \& \quad p = (n - 1)/(q - 1)$$

这类表称为**完全正交表**.不但能考察主效,且能考察交互作用.如 $L_4(2^3), L_8(2^7), L_{16}(2^{15}), L_{32}(2^{31}), L_9(3^4), L_{27}(3^{13})$

第二类,不能全部满足上述关系,这类表称为**不完全正交表**.仅能考察主效,而不能考察交互作用.如 $L_{12}(2^{11}), L_{20}(2^{19}), L_{18}(3^{17}), L_{36}(3^{13}), L_{18}(2 \times 3^7), L_{36}(2^3 \times 3^{13})$.

以Excel和SPSS为工具的管理统计,张建同,2005,p164-165



正交设计三步骤

一、选择合适的正交表

二、把因素和交互作用安排到正交表中去。俗称“**表头设计**”

三、结果分析

（**极差分析或方差分析**）



一、选择正交表



因素、交互作用及正交表的自由度

- (1) **因素的自由度**等于它的水平数减去1
- (2) 因素的**交互作用的自由度**等于每个因素的自由度的乘积：两因素的交互作用的自由度等于这两个因素的自由度的乘积；三因素的交互作用的自由度等于这三个因素的自由度的乘积； k 个因素的交互作用的自由度等于这 k 个因素的自由度的乘积
- (3) **正交表总的自由度**等于试验次数减去1
- (4) 正交表**每列的自由度**等于此列的水平数减去1



参考书

- (1) 实验设计与数据处理,张成军,2009,p37
- (2) 正交试验设计法—多因素的试验方法,上海市科学技术交流站,上海人民出版社,1975,
p14-14;p27
- (3) 正交试验法,夏伯忠,1985,p20-21;p36-37
- (4) 试验设计,苏均和,2005,p111



交互作用的级数与交互作用占正交表的列数

n 表示因素的水平， p 表示交互作用的级数

如一级交互作用如 ab ， $p=1$ ；二级交互如 abc ， $p=2$

那么交互作用占正交表的列数等于 $(n-1)^p$

2水平因素的各级交互作用均占 1列；

对于3水平因素，一级交互作用占两列，二级交互作用占四列

(1) SPSS实现有交互作用的正交实验设计,叶红卫.西安文理学院学报(自然科学版),2009,12(4):118-121

(2) 正交试验设计法—多因素的试验方法,上海市科学技术交流站,1975,上海人民出版社,p19,p23

(3) 正交试验法,夏伯忠,1985,p19,p30;

(4) 正交试验法,《中国科学院数学研究所数理统计组,1975,人民教育出版社,p47



交互作用需要占正交表多少列

3水平因素其自由度是2；两个3水平因素的交互作用的自由度是4，即此交互作用需要占2列（因为3水平正交表中每列的自由度为2）

4水平因素其自由度是3；两个4水平因素的交互作用的自由度是9，即此交互作用需要占3列（因为4水平正交表中每列的自由度为3）

5水平因素其自由度是4；两个5水平因素的交互作用的自由度是16，即此交互作用需要占4列（因为5水平正交表中每列的自由度为4）

一般地，水平数均为 n 的两个因素，其一级交互作用所占的列数为水平数减去1，即占 $(n-1)$ 列



选择正交表的原则

1、要考察的因子及交互作用的自由度总和必须不大于所选正交表的总自由度

因子的自由度+交互作用的自由度 $\leq n-1$,

$n \geq$ 因子的自由度+交互作用的自由度+1

n 是正交表的行数，也即实验次数

在存在交互作用的场合，这一条件满足时还不一定能用来安排试验。所以，这是一个**必要条件**。即，不满足这一原则所选的表，因素与交互作用一定放不下；而满足这一原则所选的表，因素与交互作用也不一定放得下

试验设计(第2版), 茆诗松2012,p134-136

试验设计, 苏均和, 2005,p111



2、若采用方差分析，则正交表应至少有1个空列。

因子的自由度+交互作用的自由度+1 $\leq$ n-1,
n $\geq$ 因子的自由度+交互作用的自由度+2
n是正交表的行数，也即实验次数



四个2水平因素，同时要考察三个交互作用

$$n \geq (2 - 1) \times 4 + (2 - 1) \times (2 - 1) \times 3 + 1 = 8$$

若选择 $L_8(2^7)$

则无法进行方差分析，因为没有空列。也就是说，要同时满足上页中说的两个条件。实际上，满足了第一个条件，这只是必要条件；而为了能够进行方差分析，还应满足第二个条件，即 $n \geq 4 + 3 + 1 + 1 = 9$



- 在无重复的正交试验设计中，只能从空列中获得误差均方的估计。即，在做表头设计时必须留出一列，让它空出来，以求得误差均方。
- 在没有空列的情况下，要么重新设计，即：使用更大的正交表；要么仍然用（已没有空列的）该正交表，但需要重复试验。
- 因为：在正交设计的方差分析过程中，误差平方和乃是从以下两个途径算得的：一是空列；二是重复试验。



又如，要研究两个2水平的因素a和b及其交互作用ab，如果选用 $L_4(2^3)$ 正交表，把a放在第一列，把b放在第二列，第三列便是交互作用ab。这样的表头设计尽管把两个主效应和交互作用都安排好了，但在方差分析时，会遇到困难。

因为在无重复的正交试验设计中，只能从空列中获得误差均方的估计。也就是说，在做表头设计时必须留出一列，让它空出来，以求得误差均方。这个表头设计中，由于3列都已排满，没有空列了，为此需要重新设计：改用更大的正交表如 $L_8(2^7)$ 或仍然用 $L_4(2^3)$ 但需要做重复实验

正交试验设计法—多因素的试验方法,上海市科学技术交流站,1975,
上海人民出版社,p41


$$L_9(3^4)$$

```
data dx;  
input x1 x2 x3 x4 y;  
cards;  
1 1 1 1 25.28  
1 2 2 2 26.95  
1 3 3 3 27.64  
2 1 2 3 26.01  
2 2 3 1 29.04  
2 3 1 2 34.67  
3 1 3 2 33.6  
3 2 1 3 32.17  
3 3 2 1 30.33  
;
```

```
proc anova;  
class x1 x2 x3 x4;  
model y=x1 x2 x3 x4;  
means x1 x2 x3 x4;  
run;
```



Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	8	91,51488889	11,43936111	.	.
Error	0	0,00000000	.	.	.
Corrected Total	8	91,51488889			
	R-Square	Coeff Var	Root MSE	y Mean	
	1,000000	.	.	29,52111	
Source	DF	Anova SS	Mean Square	F Value	Pr > F
x1	2	44,57108889	22,28554444	.	.
x2	2	10,09175556	5,04587778	.	.
x3	2	14,46828889	7,23414444	.	.
x4	2	22,38375556	11,19187778	.	.



去除一个因素，
或将其当作误差，
由此得到了一个空列

```
data dx;  
  input x1 x2 x3 y;  
  cards;  
  1 1 1 25.28  
  1 2 2 26.95  
  1 3 3 27.64  
  2 1 2 26.01  
  2 2 3 29.04  
  2 3 1 34.67  
  3 1 3 33.6  
  3 2 1 32.17  
  3 3 2 30.33  
;  
proc anova;  
  class x1 x2 x3;  
  model y=x1 x2 x3;  
  means x1 x2 x3;  
run;
```



Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model	6	69.13113333	11.52185556	1.03	0.5689
Error	2	22.38375556	11.19187778		
Corrected Total	8	91.51488889			

R-Square Coeff Var Root MSE y Mean
 0.755409 11.33232 3.345426 29.52111

Source	DF	Anova SS	Mean Square	F Value	Pr > F
x1	2	44.57108889	22.28554444	1.99	0.3343
x2	2	10.09175556	5.04587778	0.45	0.6893
x3	2	14.46828889	7.23414444	0.65	0.6074

$$1.99 = 22.286 / 11.192$$

$$0.45 = 5.046 / 11.192$$

$$0.65 = 7.234 / 11.192$$



3、若采用极差分析，则因素及其交互作用，可充满、也可不充满正交表的每一列，即无需留有空列

因子的自由度+交互作用的自由度 $\leq n-1$,
 $n \geq$ 因子的自由度+交互作用的自由度+1
 n 是正交表的行数，也即实验次数



举例!!!——针对方差分析

四因素2水平，不考虑交互作用

$$n \geq (2 - 1) \times 4 + 2 = 6$$

于是选用最接近（使得实验次数尽可能地少）的

$$L_8(2^7)$$



$L_8(2^7)$

1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	2	2	2	2
1	2	2	1	1	2	2
1	2	2	2	2	1	1
2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	2	1	2	1
2	2	1	1	2	2	1
2	2	1	2	1	1	2



八因素3水平试验，且考虑互作AB和AC

主效应

$$(3 - 1) \times 8 = 16$$

互作AB和AC

$$(3 - 1) \times (3 - 1) + (3 - 1) \times (3 - 1) = 8$$

总和

$$n \geq 16 + 8 + 2 = 26$$

于是选用最接近的

$$L_{27}(3^{13})$$



$L_{27}(3^{13})$

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3
1	2	2	2	1	1	1	2	2	2	3	3	3
1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	1	1	1
1	2	2	2	3	3	3	1	1	1	2	2	2
1	3	3	3	1	1	1	3	3	3	2	2	2
1	3	3	3	2	2	2	1	1	1	3	3	3
1	3	3	3	3	3	3	2	2	2	1	1	1
2	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
2	1	2	3	2	3	1	2	3	1	2	3	1
2	1	2	3	3	1	2	3	1	2	3	1	2
2	2	3	1	1	2	3	2	3	1	3	1	2
2	2	3	1	2	3	1	3	1	2	1	2	3
2	2	3	1	3	1	2	1	2	3	2	3	1
2	3	1	2	1	2	3	3	1	2	2	3	1
2	3	1	2	2	3	1	1	2	3	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	2	3	1	1	2	3
3	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2
3	1	3	2	2	1	3	2	1	3	2	1	3
3	1	3	2	3	2	1	3	2	1	3	2	1
3	2	1	3	1	3	2	2	1	3	3	2	1
3	2	1	3	2	1	3	3	2	1	1	3	2
3	2	1	3	3	2	1	1	3	2	2	1	3
3	3	2	1	1	3	2	3	2	1	2	1	3
3	3	2	1	2	1	3	1	3	2	3	2	1
3	3	2	1	3	2	1	2	1	3	1	3	2



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	列号
(1)	3	2	2	6	5	5	9	8	8	12	11	11	1
	4	4	3	7	7	6	10	10	9	13	13	12	
(2)		1	1	8	9	10	5	6	7	5	6	7	2
		4	3	11	12	13	11	12	13	8	9	10	
(3)			1	9	10	8	7	5	6	6	7	5	3
			2	13	11	12	12	13	11	10	8	9	
(4)				10	8	9	6	7	5	7	5	6	4
				12	13	11	13	11	12	9	10	8	
(5)					1	1	2	3	4	2	4	3	5
					7	6	11	13	12	8	10	9	
(6)						1	4	2	3	3	2	4	6
						5	13	12	11	10	9	8	
(7)							3	4	2	4	3	2	7
							12	11	13	9	8	10	
(8)								1	1	2	3	4	8
								10	9	5	7	6	
(9)									1	4	2	3	9
									8	7	6	5	
(10)										3	4	2	10
										6	5	7	
(11)											1	1	11
											13	12	
(12)												1	12
												11	
(13)													13

$L_{27}(3^{13})$ 的交互作用表



一因素4水平，三因素2水平，
不考虑交互作用的混合水平正交试验

$$(4 - 1) \times 1 = 3$$

$$(2 - 1) \times 3 = 3$$

$$n \geq 3 + 3 + 2 = 8$$

$$\longrightarrow L_8(4^1 \times 2^3)$$



$$L_8(4^1 \times 2^4)$$

1	1	1	1	1
1	2	2	2	2
2	1	1	2	2
2	2	2	1	1
3	1	2	1	2
3	2	1	2	1
4	1	2	2	1
4	2	1	1	2



$L_8(4 \times 2^4)$ 表头设计

列号

因子数	1	2	3	4	5
2	A	B	$(AB)_1$	$(AB)_2$	$(AB)_3$
3	A	B	C		
4	A	B	C	D	
5	A	B	C	D	E



一因素 (A) 4水平、三因素2水平，
考虑交互作用AB和AC

主效应

$$(4 - 1) \times 1 + (2 - 1) \times 3 = 6$$

互作AB和AC

$$(4 - 1) \times (2 - 1) + (4 - 1) \times (2 - 1) = 6$$

总和

$$n \geq 6 + 6 + 2 = 14$$

于是选用

$$L_{16}(4^1 \times 2^{12})$$



$L_{16}(4^1 \times 2^{12})$

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2
1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	2
2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1
2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1
2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2	2
3	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	2
3	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1
3	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1
3	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2	2
4	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1
4	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	2
4	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	2
4	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1	1



四因素2水平，考虑交互作用AB和AC

主效应

$$(4 - 1) \times 1 = 4$$

互作AB和AC

$$(2 - 1) \times (2 - 1) + (2 - 1) \times (2 - 1) = 2$$

总和

$$n \geq 4 + 2 + 2 = 8$$

于是选用

$$L_8(2^7)$$

表头设计

因素	A	B	AB	C	AC	D	空
列号	1	2	3	4	5	6	7



四因素2水平， 考虑交互作用AB和CD

主效应

$$(4 - 1) \times 1 = 4$$

互作AB和CD

$$(2 - 1) \times (2 - 1) + (2 - 1) \times (2 - 1) = 2$$

总和

$$n \geq 4 + 2 + 2 = 8$$

于是选用

$$L_8(2^7)$$



但 $L_8(2^7)$ 无法安排这四个因子与两个交互作用

Taguchi Design: Factors

Assign Factors

☐ To columns of the array as specified below

☒ To allow estimation of selected interactions Interactions...

Facto	Name	Level Values	Column	Level
A	A	1 2	1	2
B	B	1 2	2	2
C	C	1 2	4	2
D	D	1 2	7	2

Help OK Cancel

Taguchi Design: Interactions

Available Terms:

AC
AD
BC
BD

>
>>
<
<<

Selected Terms:

AB
CD

Factors:

A:A
B:B
C:C
D:D

Help OK Cancel

Minitab中无法实现
a,b,c,d,ab,cd

Error

```
OADesign S 2 4;  
XMatrix C1-C4;  
Levels 1 2 1 2 1 2 1 2;  
Interactions C1 C2 C3 C4.
```

* ERROR * Unable to find a design that allows all the requested
* interactions to be estimated. You may need more runs.



因为，不管四个因子放在哪四列上，两个交互作用要么与一个因子共用一列，要么这两个交互作用共用一列，这都会产生**混杂**。在正交表上出现这一现象的原因是正交表的构造引起的

表头设计

因素	A	B	AB	C			D
			CD				
列号	1	2	3	4	5	6	7



当所考察的因子与交互作用自由度之和等于 $n-1$ 时，表的各列都被排满了，这便成了**饱和设计**，那么此时的处理办法有：

- (1) 进行重复试验后进行方差分析；
- (2) 改用较大的正交表进行试验；
- (3) 将平方和较小的列看作误差列；



当出现混杂现象时，只要选择较大的正交表就可以避免了，譬如选用 $L_{16}(2^{15})$ ，其表头设计如下：

因素	A	B	AB	C				D				CD			
列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

在表上有多个空白列时，为避免可能存在的交互作用，可以首先将因子放在**各组的**第一列（也称为**基本列**）。如：

$L_8(2^7)$ 的基本列是1，2，4列

$L_{16}(2^{15})$ 的基本列是1，2，4，8列



正交表的列如何分组（群）

对于等水平的**完全正交表** $L_n(q^p)$ 来讲，如果 $n=q^k$ ，则全部的列数 p 【 $=(n-1)/(q-1)$ 】 可被分为 k 组，各组的列数分别为 $q^0, q^1, q^2 \dots q^{k-1}$

如 $L_8(2^7)$ 的列被分成三个组（ $8=2^3$ ， $n=8, q=2, k=3$ ），即

第一组：第**1**列（ $q^k=2^0=1$ ）

第二组：第**2**、3两列（ $q^k=2^1=2$ ）

第三组：第**4**、5、6、7四列（ $q^k=2^{3-1}=4$ ）

各组的**第一列**（也称为**基本列**），如：

$L_8(2^7)$ 的基本列是**1, 2, 4**列



正交表上有交互作用的两列如果处于不同的组时，则其交互作用列必在组别更高的一组中；当有交互作用的两列位于同一组时，则交互作用必在级别较低的组中。比如：

若A置于第1列，B置于第2列，则 $A \times B$ 为第3列；
若A置于第1列，B置于第4列，则 $A \times B$ 为第5列；
若A置于第2列，B置于第3列，则 $A \times B$ 为第1列；
若A置于第4列，B置于第7列，则 $A \times B$ 为第3列。

正交试验设计法—多因素的试验方法,上海市科学技术交流站,
1975,上海人民出版社,p79-80

正交试验法,《中国科学院数学研究所数理统计组,1975,人民教育出版社,p13



二、安排主效和交互作用(表头设计)

怎样将因素和交互作用安排到正交表的合适的列中去，同时避免效应间的混杂



表头设计的一般步骤

(1) 首先考虑交互作用不可忽略的因子（包括暂时不知能否忽略的因子），按不可混杂的原则，先将这些因子及其交互作用在表头上排妥

(2) 再将其余可以忽略其交互作用的那些因子任意安排在剩下的各列上

正交试验设计法——多因素的试验方法,上海市科学技术交流站, 1975,上海人民出版社,p15



辅助表头设计的四种方法



(1) 利用交互作用表

一些正交表有与其对应的交互作用表，但不是每个正交表都有



$$L_8(2^7)$$

1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	2	2	2	2	2
1	2	2	1	1	2	2	2
1	2	2	2	2	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2	2
2	1	2	2	1	2	2	1
2	2	1	1	2	2	2	1
2	2	1	2	1	1	1	2



1	2	3	4	5	6	7	列号
(1)	3	2	5	4	7	6	1
	(2)	1	6	7	4	5	2
		(3)	7	6	5	4	3
			(4)	3	2	5	4
				(5)	3	2	5
					(6)	1	6
						(7)	7

$L_8(2^7)$ 交互作用表



$L_{16}(2^{15})$

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2
1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	2
1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1
1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1
1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2	2
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	2
2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1
2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1
2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	1	2	1	2
2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1
2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	1	2
2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	1	2
2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1	1



没有交互作用表的 $L_{12}(2^{11})$

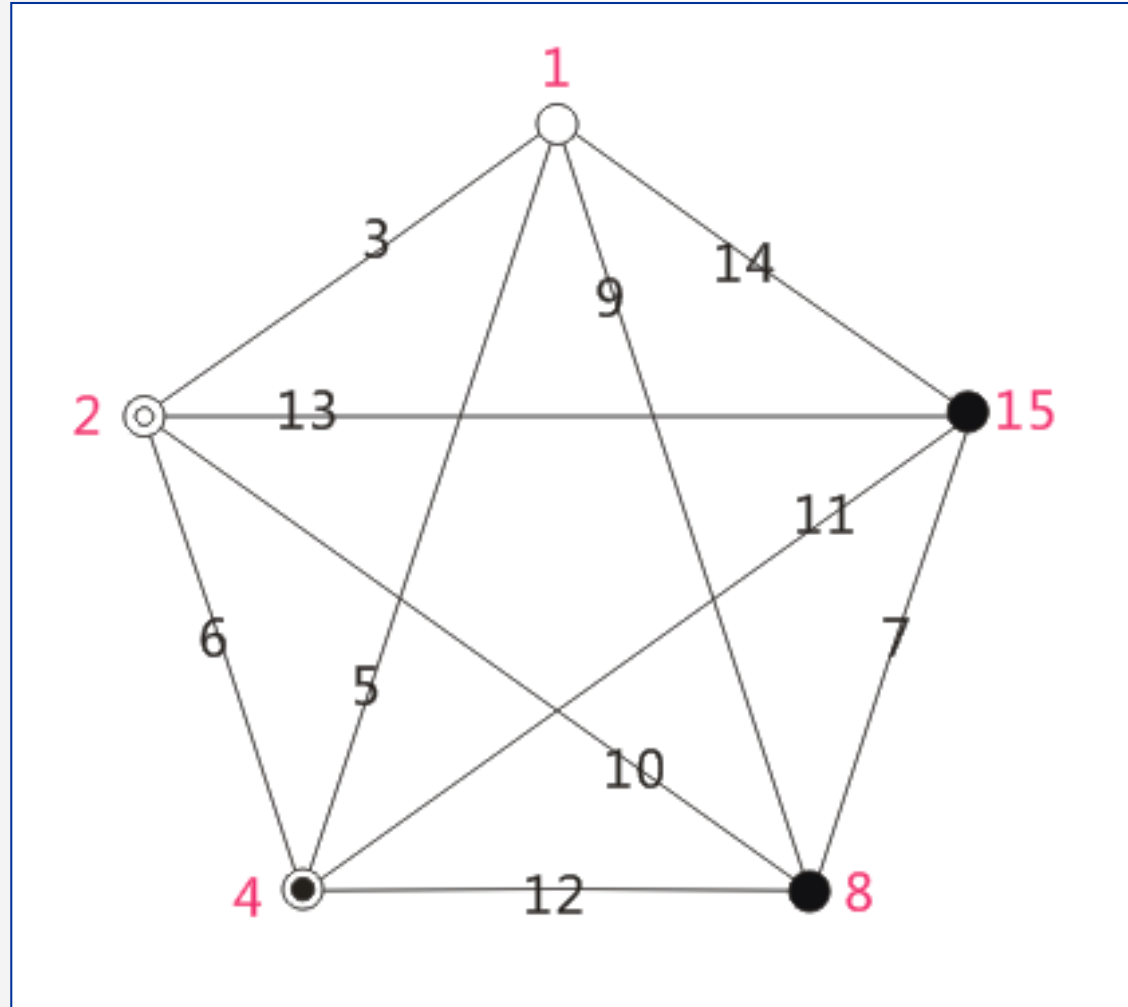
Run	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	2	1	2	2	1	1	2
3	2	1	2	1	2	2	2	1	1	1	2
4	1	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2
5	2	2	1	1	2	1	2	1	2	2	1
6	1	2	2	1	2	2	1	2	1	2	1
7	1	2	2	2	1	2	2	1	2	1	1
8	2	2	2	1	1	1	1	2	2	1	2
9	2	1	2	2	1	1	2	2	1	2	1
10	2	1	1	2	2	2	1	2	2	1	1
11	2	2	1	2	1	2	1	1	1	2	2
12	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2

[illegible]



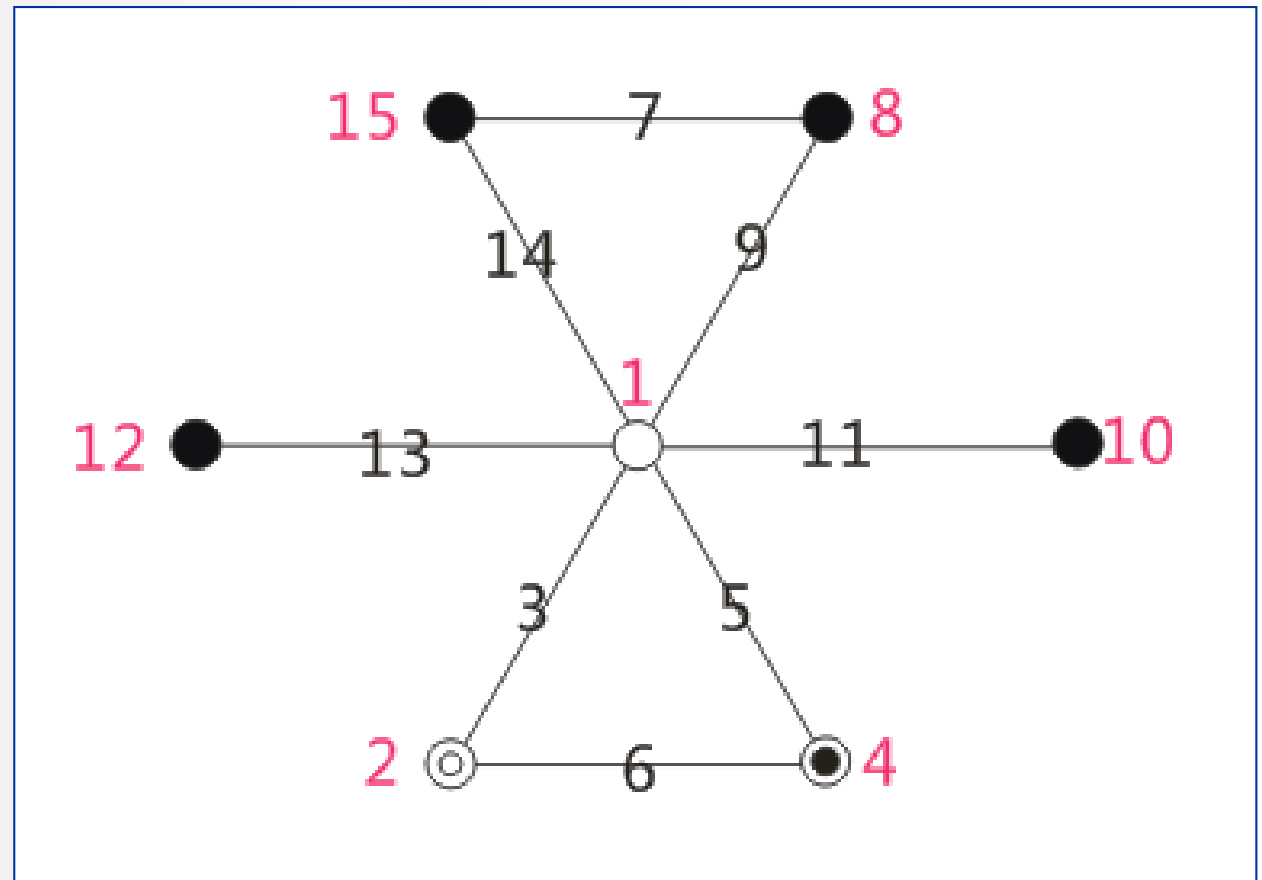
(2) 利用点线图

$$L_{16}(2^{15})$$



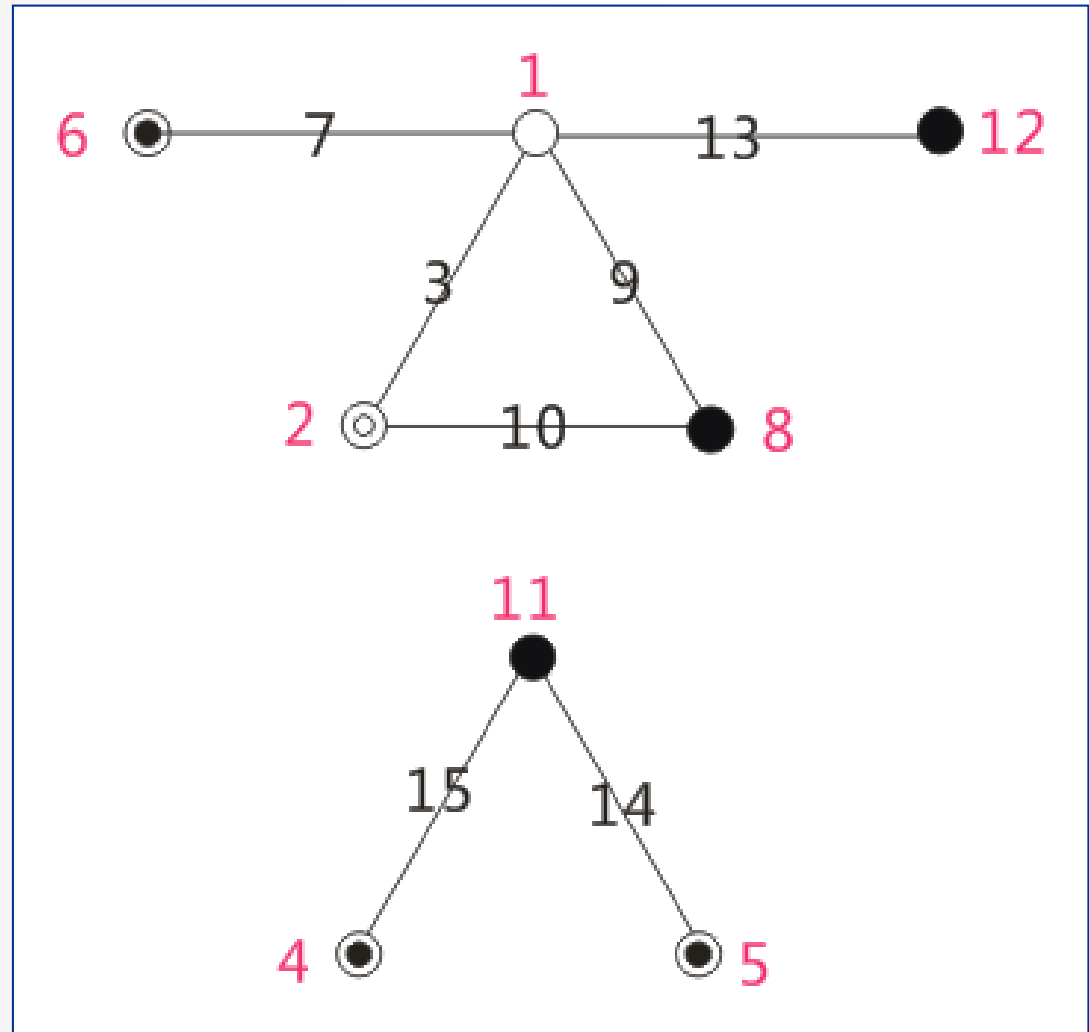


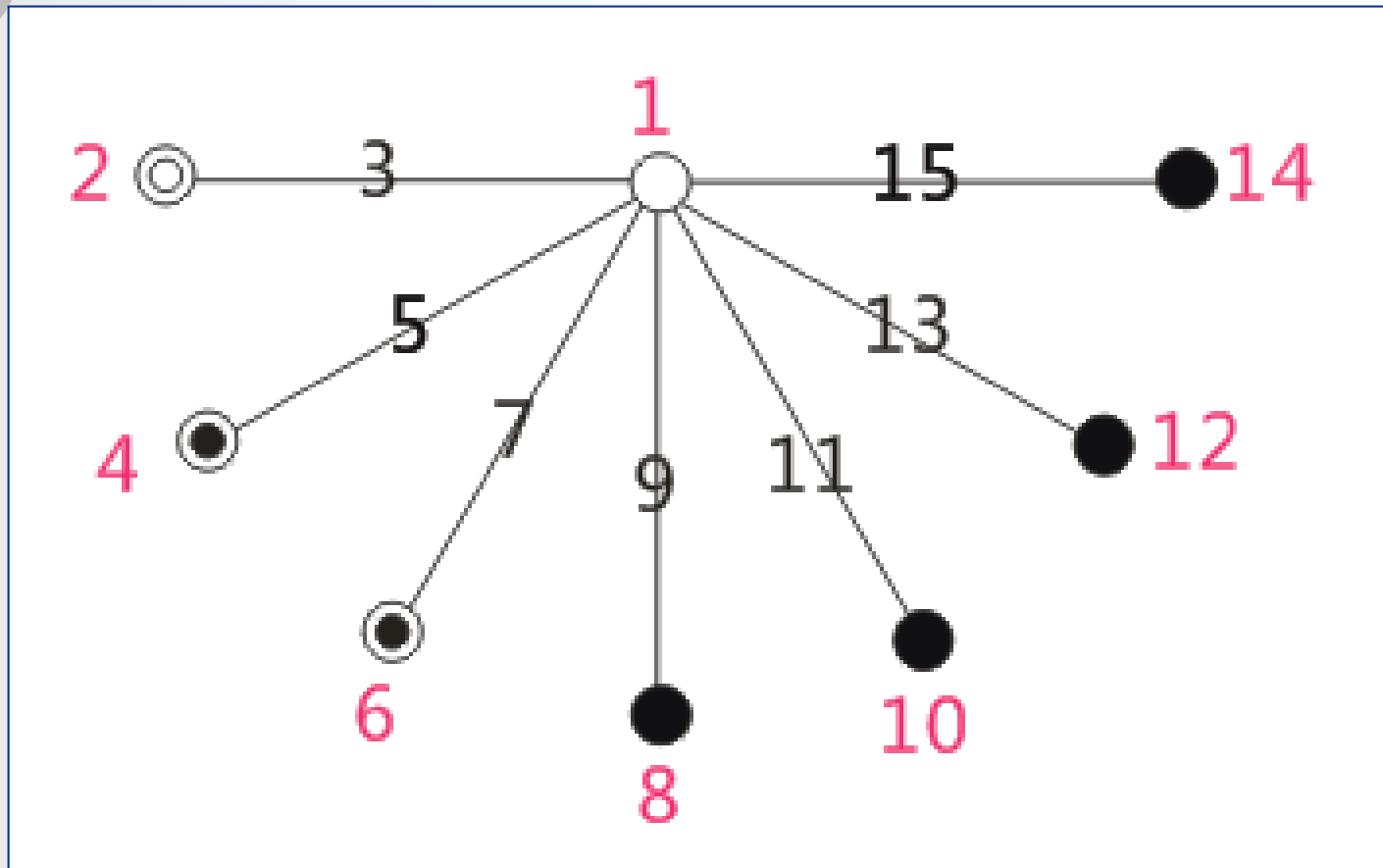
$$L_{16}(2^{15})$$





$$L_{16}(2^{15})$$





$$L_{16}(2^{15})$$



点线图与交互作用表的关系



- *Linear graphs are a simple two-way graphical representation of some of the possible combinations of interaction columns.*
- *Interaction tables present all of the possible interaction columns, and linear graphs present just a few possible combinations graphically.*



点线图参考书（理科馆）

(1) 实验设计法(上): (日)田口玄一著, 魏锡禄, 王世芳译, 机械工业出版社, 1987

(2) System of experimental design :
engineering methods to optimize quality and
minimize costs, by Genichi Taguchi



(3) 利用 *Design Expert*

$L_8(2^7)$

7 Factors: A, B, C, D, E, F, G

Design Matrix Evaluation for Factorial Main effects Model

Factorial Effects Aliases

[Est. Terms] Aliased Terms

[Intercept] = Intercept

[A] = A - BC - DE - FG

[B] = B - AC - DF - EG

[C] = C - AB - DG - EF

[D] = D - AE - BF - CG

[E] = E - AD - BG - CF

[F] = F - AG - BD - CE

[G] = G - AF - BE - CD



(4) 利用Minitab

Taguchi Design - Factors

Assign Factors

☐ To columns of the array as specified below

☒ To allow estimation of selected Interactions...

Factor	Name	Level Values	Column	Level
A	A	1 2 3 4	1	4
B	B	1 2	2	2
C	C	1 2	3	2
D	D	1 2	4	2

Help OK Cancel

Taguchi Design: Interactions

Available Terms:

AB
AC
BC
BD

>
>>
<
<<

Selected Terms:

AD
CD

Factors:

A:A
B:B
C:C
D:D

Help OK Cancel

举例 $L_8(2^7)$



列号	1	2	3	4	5	6	7
因素排入	A	B	C	D	AD	空列	CD
No.1	2	1	2	1	2	1	2
No.2	1	2	2	1	1	2	2
No.3	1	2	2	2	2	1	1
No.4	2	1	2	2	1	2	1
No.5	2	2	1	1	2	2	1
No.6	1	1	1	1	1	1	1
No.7	2	2	1	2	1	1	2
No.8	1	1	1	2	2	2	2

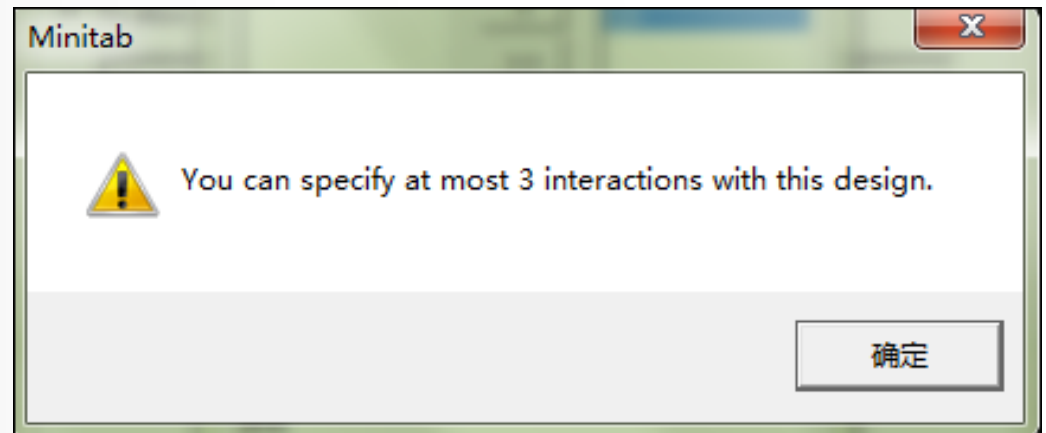
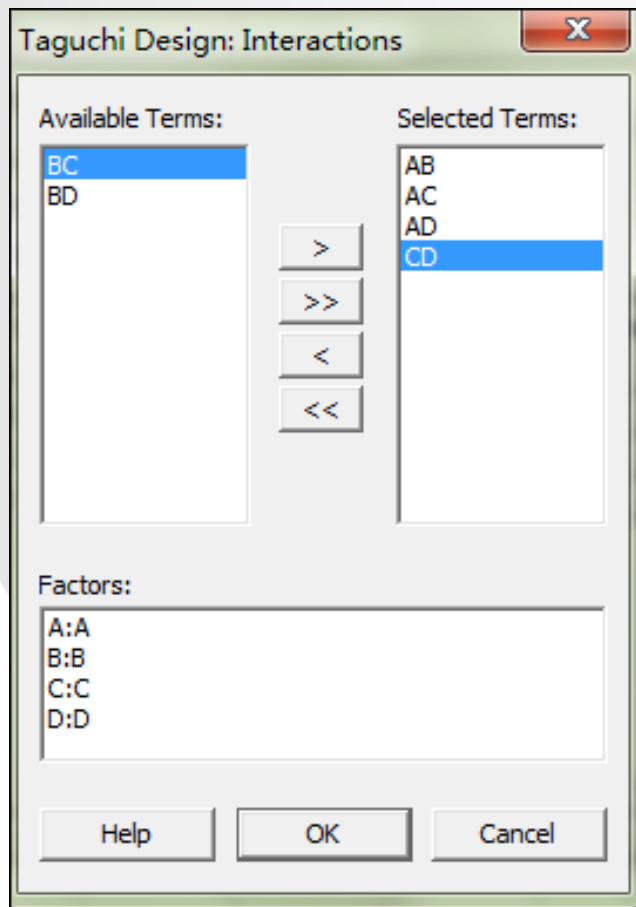


Minitab所给出的最终表头设计

	A	B	C	D
1	1	1	1	1
2	1	1	1	2
3	1	2	2	1
4	1	2	2	2
5	2	1	2	1
6	2	1	2	2
7	2	2	1	1
8	2	2	1	2



Minitab且能给出相关的出错提示





总之，表头设计的目的是
避免混杂！



分辨率与效应间的混杂

分辨率	主效应间有无混？	主效应与一级互作间有无混杂？	一级互作间有无混杂？
III	无	有	有
IV	无	无	有
V	无	无	无



2^{9-5} III	2^{10-6} III	2^{11-7} III	2^{12-8} III	2^{13-9} III	2^{14-10} III	2^{15-11} III
2^{9-4} IV	2^{10-5} IV	2^{11-6} IV	2^{12-7} IV	2^{13-8} IV	2^{14-9} IV	2^{15-10} IV
2^{9-3} IV	2^{10-4} IV	2^{11-5} IV	2^{12-6} IV	2^{13-7} IV	2^{14-8} IV	2^{15-9} IV
2^{9-2} VI	2^{10-3} V	2^{11-4} V	2^{12-5} IV	2^{13-6} IV	2^{14-7} IV	2^{15-8} IV
2^{9-1} IX	2^{10-2} VI	2^{11-3} VI	2^{12-4} VI	2^{13-5} V	2^{14-6} V	2^{15-7} V
2^9	2^{10-1} X	2^{11-2} VII	2^{12-3} VI	2^{13-4} VI	2^{14-5} VI	2^{15-6} VI



三、正交实验的分析

➤ 极差分析法
(直观分析法)

➤ 方差分析法



1、极差分析法

例1：三因素2水平，无交互作用

因素			
水平	配比 (A)	加温温度 (B, °C)	保温时间 (C, min)
1	$A_1=1:1$	$B_1=150$	$C_1=30$
2	$A_2=2:3$	$B_2=165$	$C_2=35$
3	$A_3=3:7$	$B_3=180$	$C_3=40$



$L_9(3^4)$

因素

实验号	配比 (A)	加温温度 (B, °C)	保温时间 (C, min)
1	1 (1:1)	1 (150)	1 (30)
2	1 (1:1)	2 (165)	2 (35)
3	1 (1:1)	3 (180)	3 (40)
4	2 (2:3)	1 (150)	2 (35)
5	2 (2:3)	2 (165)	3 (40)
6	2 (2:3)	3 (180)	1 (30)
7	3 (3:7)	1 (150)	3 (40)
8	3 (3:7)	2 (165)	1 (30)
9	3 (3:7)	3 (180)	2 (35)



实验号	配比 (A)	加温温度 (B, °C)	保温时间 (C, min)	指标y
1	1 (1:1)	1 (150)	1 (30)	35
2	1 (1:1)	2 (165)	2 (35)	30
3	1 (1:1)	3 (180)	3 (40)	29
4	2 (2:3)	1 (150)	2 (35)	26.4
5	2 (2:3)	2 (165)	3 (40)	26
6	2 (2:3)	3 (180)	1 (30)	15
7	3 (3:7)	1 (150)	3 (40)	20
8	3 (3:7)	2 (165)	1 (30)	20
9	3 (3:7)	3 (180)	2 (35)	23
I	94	81.4	70	
II	67.4	76	79.4	
III	63	67	75	
R	31	14.4	9.4	

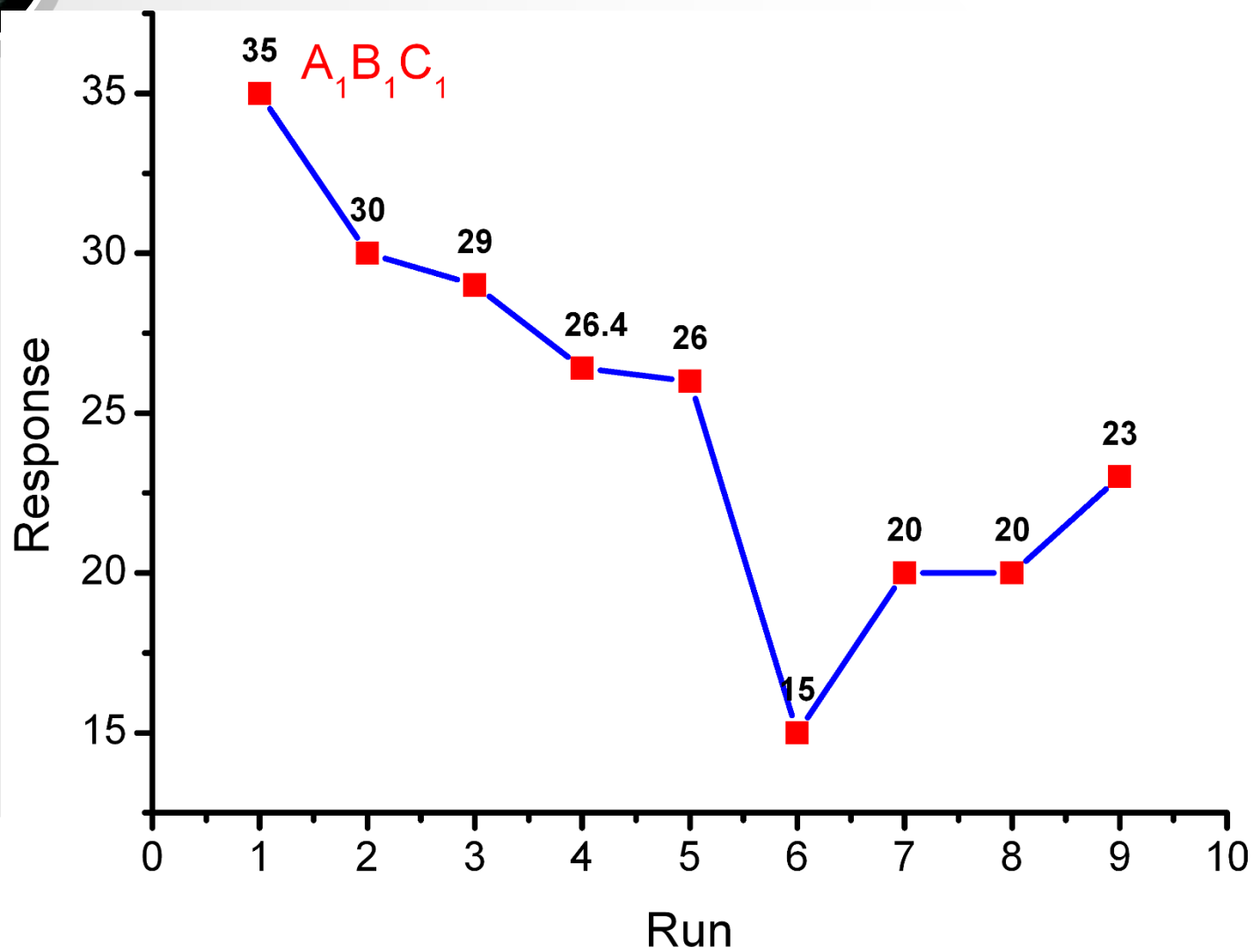
主 ————— 次
A B C



极差的大小反映了因素变化时实验指标的变化幅度。所以，因素的极差越大，说明该因素对指标的影响越大，它就越重要。

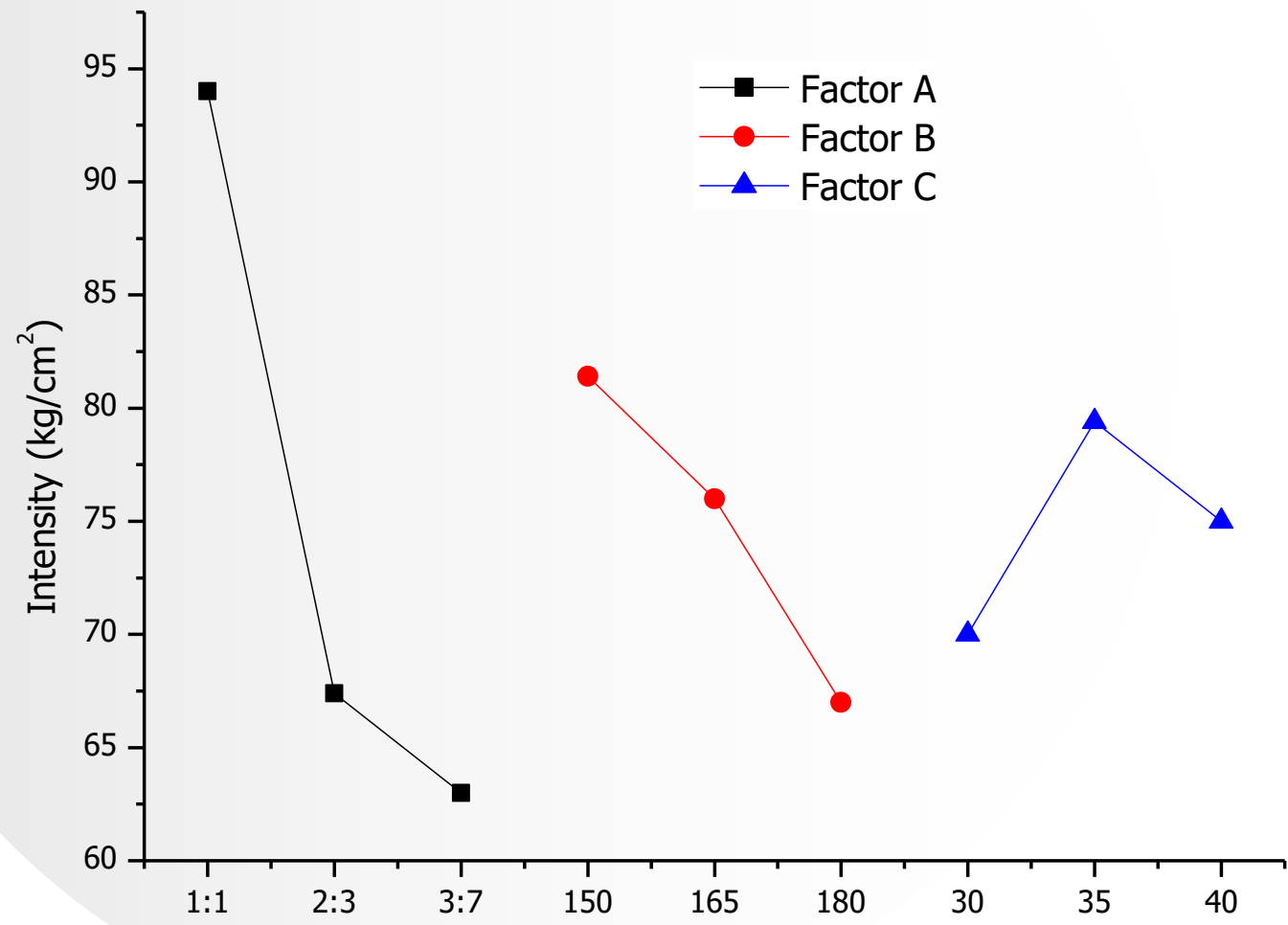
由上表可知，因素的重要性依次为A，B，C

正交试验法，《中国科学院数学研究所数理统计组，1975,人民教育出版社,p18





因素极差图





“看一看”的最好条件

$A_1B_1C_1$

“算一算”的最好条件

$A_1B_1C_2$

最优条件的选择与验证



例2：有交互作用

水平	因素				
	含碳量 (A, %)	含镍量 (B, %)	含铜量 (C, %)	出炉温度 (D, °C)	冷却方式 (E)
1	A ₁ =0.12	B ₁ =2.5	C ₁ =0	1620	不造型
2	A ₂ =0.07	B ₂ =4.0	C ₂ =3.5	1560	造型

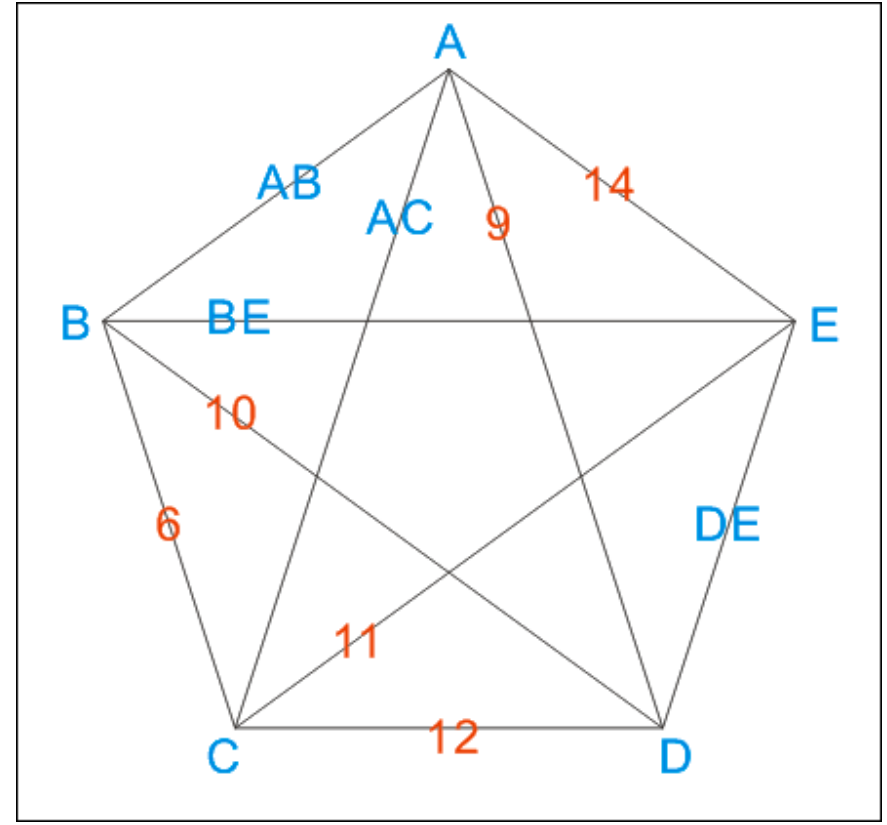
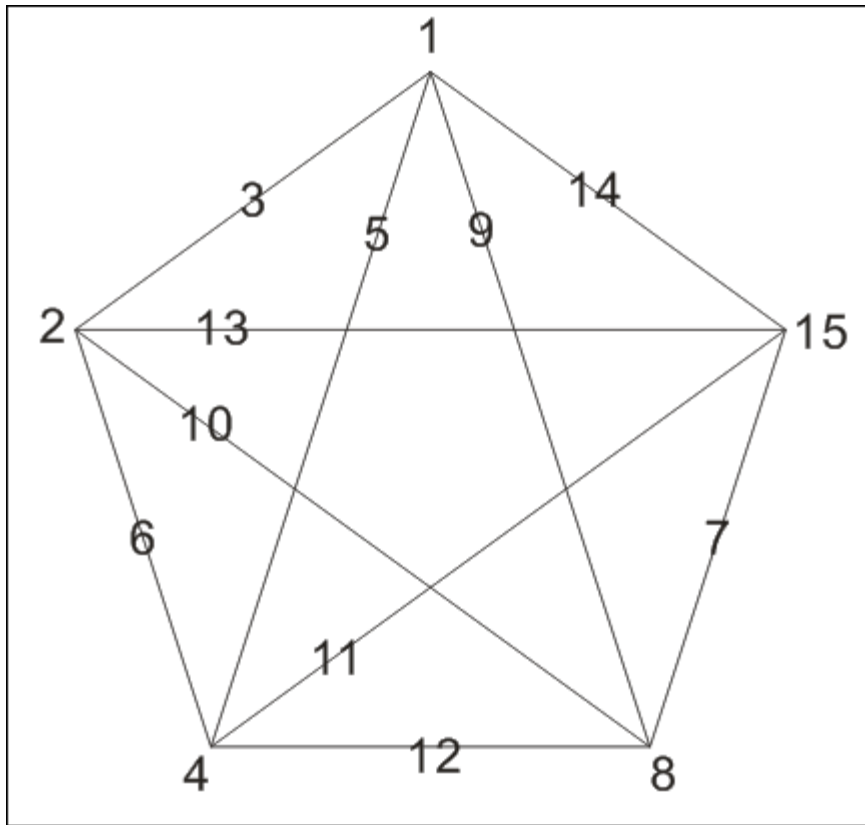
A;B;C;D;E

AB;AC;BE;DE

$$n \geq (2-1) \times 5 + ((2-1) \times (2-1)) \times 4 + 1 = 10$$

↓

$L_{16}(2^{15})$



先把A排在第1列，B排在第2列，查点线图可知，AB应排在第3列，则C不能放在第3列，否则就会产主效应C和互作AB之间的“混杂”。再将C排在第4列，查点线图知AC在第5列。然后将D排在第8列、E排在第15列，查图知DE应在第7列，BE排在第13列。再由此完成表头设计



实验号	A	B			C			D			E	y
	1	2			4			8			15	
1	1	1			1			1			1	9.2
2	1	1			1			2			2	4.8
3	1	1			2			1			2	2.0
4	1	1			2			2			1	3.8
5	1	2			1			1			2	3.8
6	1	2			1			2			1	3.6
7	1	2			2			1			1	8.6
8	1	2			2			2			2	9.6
9	2	1			1			1			2	9.4
10	2	1			1			2			1	12.0
11	2	1			2			1			1	8.6
12	2	1			2			2			2	9.8
13	2	2			1			1			1	9.2
14	2	2			1			2			2	9.6
15	2	2			2			1			2	3.0
16	2	2			2			2			1	2.4
I	45.4	59.6			61.6			53.8			57.4	
II	64.0	49.8			47.8			55.6			52.0	
R	18.6	9.8			13.8			1.8			5.4	

$DE > AB > AC > A > C > B > BE > E > D$



2、正交试验的方差分析

直观分析法简便易懂，只需对实验结果作少量计算，通过综合比较，便可得出最优条件。但直观分析法不能估计实验过程中以及结果的测定过程中必然存在的误差的大小。也就是说，不能区分某因子各水平对应的实验结果间的差异究竟是真正由因素的不同水平所引起，还是由实验的误差所引起，因此不能知道极差分析的精度

为了弥补直观分析法的这个缺点，可采用方差分析的方法。方差分析正是将因子水平或交互作用的变化所引起的实验结果间的差异与误差的波动所引起的差异区分开来的一种数学方法

正交试验设计法—多因素的试验方法,上海市科学技术交流站,1975,上海人民出版社,p24



例1：四因素2水平且部分互作

文件夹 “例1_四因素2水平且部分互作_Minitab和DX”



例2：五因素3水平且部分互作

文件夹 “例2_五因素3水平且
部分互作_Minitab”



例3：三因素3水平且全部互作

文件夹“例3_三因素3水平且全部互作_Minitab和DX”



因素		A (反应温度)	B (反应压力)	C (溶液浓度)
水平	1	60	2	0.5
	2	65	2.5	1
	3	70	3	2

因子主效、全部2级互作

$$L_{27}(3^13)$$

实验号

A	B	(AB) ₁	(AB) ₂	C	(AC) ₁	(AC) ₂	(BC) ₁	(BC) ₂	y
1	2	3	4	5	6	7	8	11	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1.30
2	1	1	1	2	2	2	2	2	4.63
3	1	1	1	3	3	3	3	3	7.23
4	1	2	2	1	1	1	2	3	0.50
5	1	2	2	2	2	2	3	1	3.67
6	1	2	2	3	3	3	1	2	6.23
7	1	3	3	1	1	1	3	2	1.37
8	1	3	3	2	2	2	1	3	4.73
9	1	3	3	3	3	3	2	1	7.07
10	2	1	2	1	2	3	1	1	0.47
11	2	1	2	2	3	1	2	2	3.47
12	2	1	2	3	1	2	3	3	6.13
13	2	2	3	1	2	3	2	3	0.33
14	2	2	3	2	3	1	3	1	3.40
15	2	2	3	3	1	2	1	2	5.80
16	2	3	1	1	2	3	3	2	0.63
17	2	3	1	2	3	1	1	3	3.97
18	2	3	1	3	1	2	2	1	6.50
19	3	1	2	1	3	2	1	1	0.03
20	3	1	2	2	1	3	2	2	3.40
21	3	1	2	3	2	1	3	3	6.80
22	3	2	3	1	3	2	2	3	0.57
23	3	2	3	2	1	3	3	1	3.97
24	3	2	3	3	2	1	1	2	6.83
25	3	3	1	1	3	2	3	2	1.07
26	3	3	1	2	1	3	1	3	3.97
27	3	3	1	3	2	1	2	1	6.57
I	36.73	33.46	35.63	34.30	6.27	32.94	34.21	33.33	32.98
II	30.70	31.30	32.08	31.73	35.21	34.66	33.13	33.04	33.43
III	33.21	35.88	32.93	34.61	59.16	33.04	33.30	34.27	34.23
R	6.03	4.58	3.55	2.88	52.89	1.72	1.08	1.23	1.25



思考：上表如何分别用

1、交互作用表

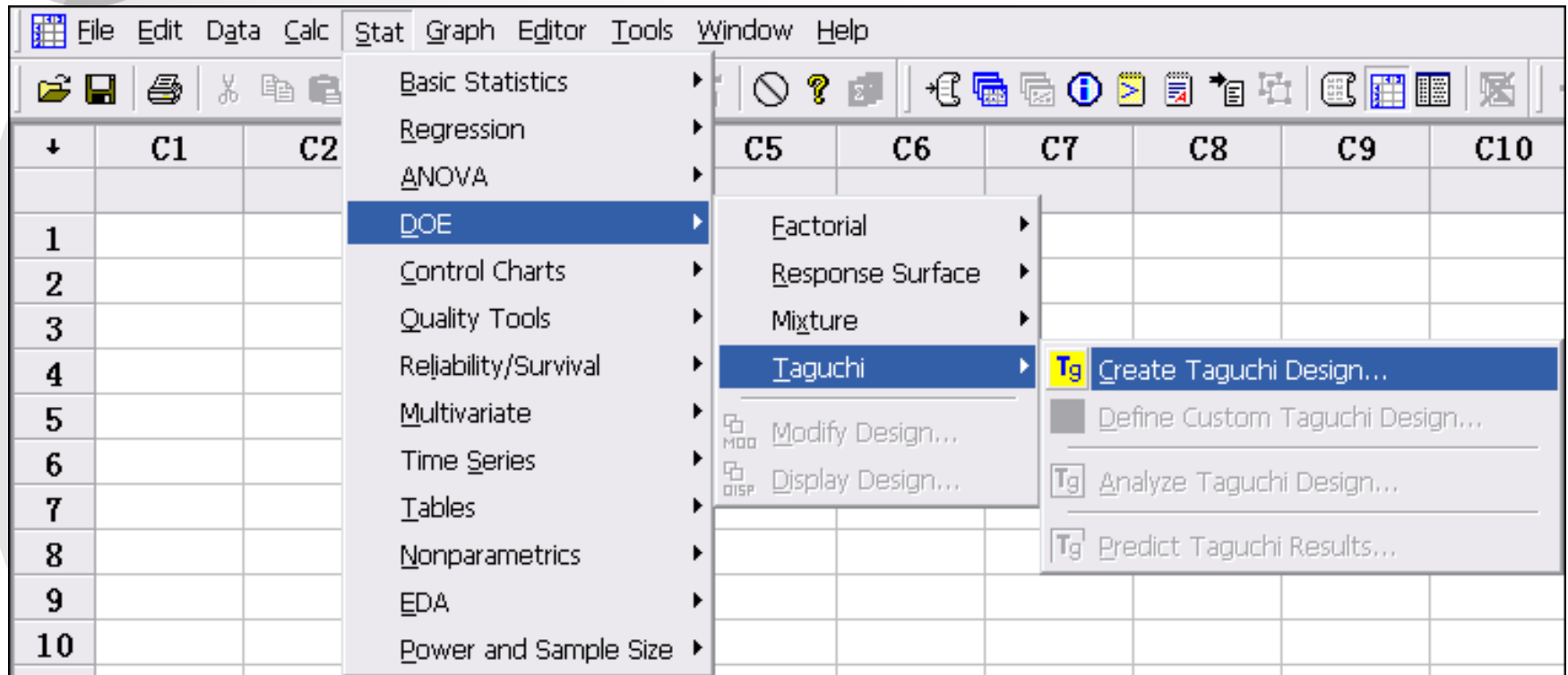
2、点线图

3、MiniTAB

来安排？



MiniTAB 实现过程





Taguchi Design

Type of Design

- ☐ 2-Level Design (2 to 31 factors)
- ☒ 3-Level Design (2 to 13 factors)
- ☐ 4-Level Design (2 to 5 factors)
- ☐ 5-Level Design (2 to 6 factors)
- ☐ Mixed Level Design (2 to 26 factors)

Number of factors:

Buttons: Display Available Designs..., Designs..., Factors..., Options..., Help, OK, Cancel

Taguchi Design - Design

Runs	3	**	Columns
L9	3	**	3
L27	3	**	3

☐ Add a signal factor for dynamic characteristics

Buttons: Help, OK, Cancel



Taguchi Design

Type of Design

- ☐ 2-Level Design (2 to 31 factors)
- ☒ 3-Level Design (2 to 13 factors)
- ☐ 4-Level Design (2 to 5 factors)
- ☐ 5-Level Design (2 to 6 factors)
- ☐ Mixed Level Design (2 to 26 factors)

Number of factors:

Display Available Designs...

Designs... Factors... Options...

OK Cancel

Taguchi Design - Factors

Assign Factors

- ☐ To columns of the array as specified below
- ☒ To allow estimation of selected

Interactions...

Factor	Name	Level Values	Column	Level
A	A	1 2 3	1	3
B	B	1 2 3	2	3
C	C	1 2 3	3	3

Help OK Cancel



Taguchi Design - Interactions

Available Terms: BC

Selected Terms: AB, AC

Factors:
A:A
B:B
C:C

Help OK Cancel

A	B	C
1	1	1
1	1	2
1	1	3
1	2	1
1	2	2
1	2	3
1	3	1
1	3	2
1	3	3
2	1	1
2	1	2
2	1	3
2	2	1
2	2	2
2	2	3
2	3	1
2	3	2
2	3	3
3	1	1
3	1	2
3	1	3
3	2	1
3	2	2
3	2	3
3	3	1
3	3	2
3	3	3



A	B	C	y
1	1	1	1.30
1	1	2	4.63
1	1	3	7.23
1	2	1	0.50
1	2	2	3.67
1	2	3	6.23
1	3	1	1.37
1	3	2	4.73
1	3	3	7.07
2	1	1	0.47
2	1	2	3.47
2	1	3	6.13
2	2	1	0.33
2	2	2	3.40
2	2	3	5.80
2	3	1	0.63
2	3	2	3.97
2	3	3	6.50
3	1	1	0.03
3	1	2	3.40
3	1	3	6.80
3	2	1	0.57
3	2	2	3.97
3	2	3	6.83
3	3	1	1.07
3	3	2	3.97
3	3	3	6.57

File Edit Data Calc Stat Graph Editor Tools Window Help

↓

C1

C2

A

B

1	1	
2	1	
3	1	
4	1	
5	1	
6	1	
7	1	
8	1	
9	1	
10	2	
11	2	1
12	2	1
13	2	2

Basic Statistics

Regression

ANOVA

DOE

Control Charts

Quality Tools

Reliability/Survival

Multivariate

Time Series

Tables

Nonparametrics

EDA

Power and Sample Size

One-Way...

One-Way (Unstacked)...

Two-Way...

Analysis of Means...

Balanced ANOVA...

General Linear Model...

Fully Nested ANOVA...

Balanced MANOVA...

General MANOVA...

Test for Equal Variances...

Interval Plot...

Main Effects Plot...

Interactions Plot...



General Linear Model [X]

C1	A
C2	B
C3	C
C4	y

Responses:

Model:

Random factors:



General Linear Model

C1	A
C2	B
C3	C
C4	y

Responses:

Model:

Random factors:

Covariates...

Options...

Comparisons...

Graphs...

Results...

Storage...

Factor Plots...

Select

Help

OK

Cancel



General Linear Model: y versus A, B, C

Factor	Type	Levels	Values
A	fixed	3	1, 2, 3
B	fixed	3	1, 2, 3
C	fixed	3	1, 2, 3

Analysis of Variance for y, using Adjusted SS for Tests

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
A	2	2.0389	2.0389	1.0195	23.66	0.000
B	2	1.1666	1.1666	0.5833	13.54	0.003
C	2	155.8696	155.8696	77.9348	1808.89	0.000
A*B	4	1.3189	1.3189	0.3297	7.65	0.008
A*C	4	0.2821	0.2821	0.0705	1.64	0.256
B*C	4	0.1809	0.1809	0.0452	1.05	0.440
Error	8	0.3447	0.3447	0.0431		
Total	26	161.2017				

S = 0.207567 R-Sq = 99.79% R-Sq(adj) = 99.31%

方差分析结果



General Linear Model

Responses: y

Model:
A B C A*B

Random factors:

Select

Covariates... Options... Comparisons...
Graphs... Results... Storage...
Factor Plots...
OK Cancel

General Linear Model: y versus A, B, C

Factor	Type	Levels	Values
A	fixed	3	1, 2, 3
B	fixed	3	1, 2, 3
C	fixed	3	1, 2, 3

Analysis of Variance for y, using Adjusted SS for Tests

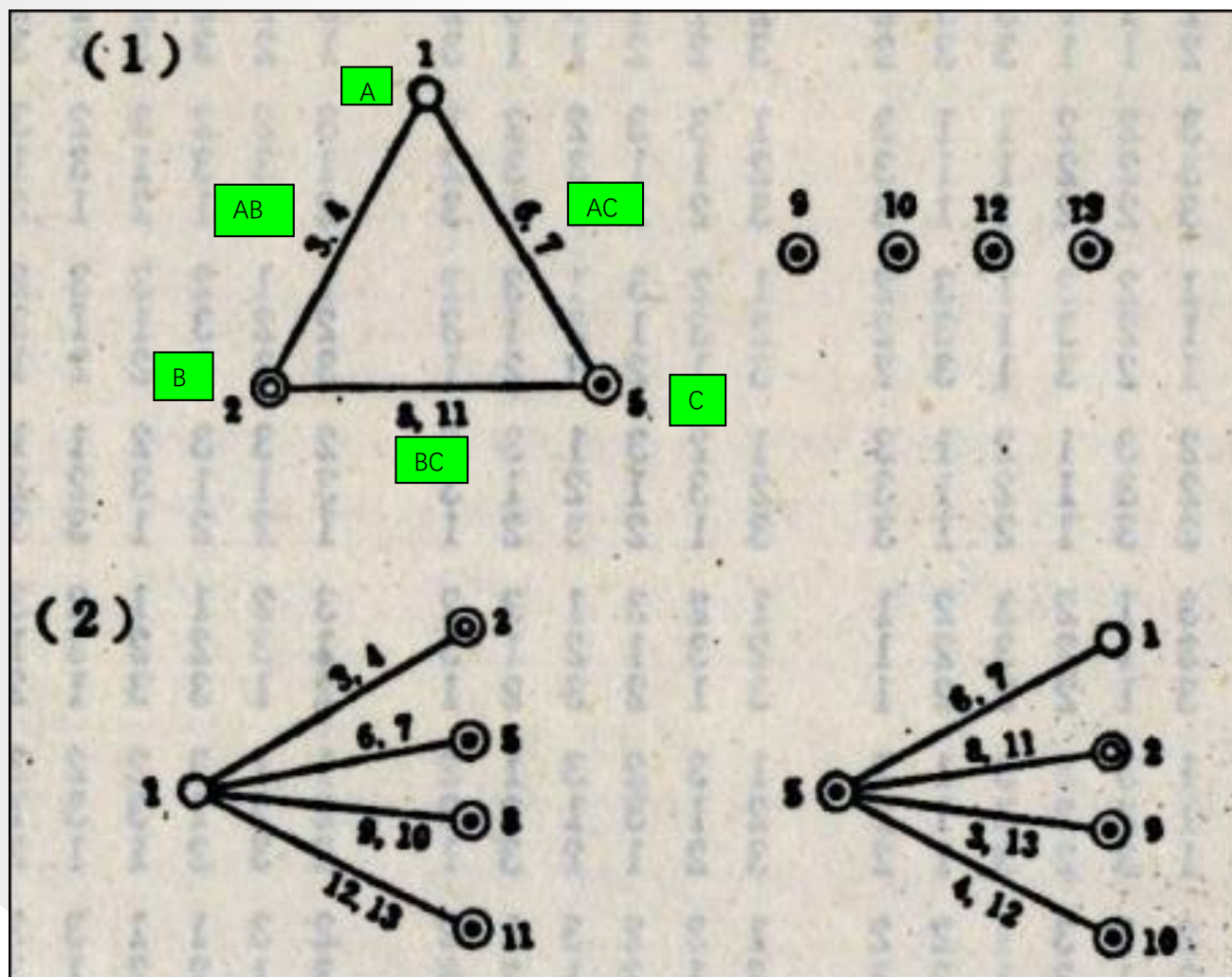
Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
A	2	2.039	2.039	1.019	20.19	0.000
B	2	1.167	1.167	0.583	11.55	0.001
C	2	155.870	155.870	77.935	1543.83	0.000
A*B	4	1.319	1.319	0.330	6.53	0.003
Error	16	0.808	0.808	0.050		
Total	26	161.202				

S = 0.224681 R-Sq = 99.50% R-Sq(adj) = 99.19%

去除不显著的
AC、BC
两个交互作用



DesignExpert方差分析结果





Std	Run	A:A	B:B	C:C	D:D	E:E	F:F	G:G	H:H	J:J	K:K	L:L	M:M	N:N
2	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
20	2	3	1	3	2	2	1	3	2	1	3	2	1	3
6	3	1	2	2	2	3	3	3	1	1	1	2	2	2
12	4	2	1	2	3	3	1	2	3	1	2	3	1	2
22	5	3	2	1	3	1	3	2	2	1	3	3	2	1
21	6	3	1	3	2	3	2	1	3	2	1	3	2	1
5	7	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	1	1	1
25	8	3	3	2	1	1	3	2	3	2	1	2	1	3
18	9	2	3	1	2	3	1	2	2	3	1	1	2	3
13	10	2	2	3	1	1	2	3	2	3	1	3	1	2
11	11	2	1	2	3	2	3	1	2	3	1	2	3	1
16	12	2	3	1	2	1	2	3	3	1	2	2	3	1
8	13	1	3	3	3	2	2	2	1	1	1	3	3	3
24	14	3	2	1	3	3	2	1	1	3	2	2	1	3
10	15	2	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
9	16	1	3	3	3	3	3	3	2	2	2	1	1	1
7	17	1	3	3	3	1	1	1	3	3	3	2	2	2
19	18	3	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2
23	19	3	2	1	3	2	1	3	3	2	1	1	3	2
1	20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	21	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3
15	22	2	2	3	1	3	1	2	1	2	3	2	3	1
27	23	3	3	2	1	3	2	1	2	1	3	1	3	2
14	24	2	2	3	1	2	3	1	3	1	2	1	2	3
26	25	3	3	2	1	2	1	3	1	3	2	3	2	1
17	26	2	3	1	2	2	3	1	1	2	3	3	1	2
4	27	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2	3	3	3

把A, B, C分别安置在第1,2,5列, 把其余的列全部删除



Design Expert 方差分析结果

y ¹ Transform		Effects		ANOVA		Diagnostics		Model Graphs			
Use your mouse to right click on individual cells for definitions.											
Response		1		R1							
ANOVA for selected factorial model											
Analysis of variance table [Classical sum of squares - Type II]											
		Sum of		Mean		F		p-value			
Source		Squares		df		Square		Value		Prob > F	
Model		160.86		18		8.94		207.42		< 0.0001	
A-A		2.04		2		1.02		23.66		0.0004	
B-B		1.17		2		0.58		13.54		0.0027	
C-E		155.87		2		77.93		1808.89		< 0.0001	
AB		1.32		4		0.33		7.65		0.0077	
AC		0.28		4		0.071		1.64		0.2561	
BC		0.18		4		0.045		1.05		0.4395	
Residual		0.34		8		0.043					
Cor Total		161.20		26							



SAS方差分析结果

Source	DF	Type I SS	Mean Square	F Value	Pr > F
x1	2	2,0389407	1,0194704	23,66	0,0004
x2	2	1,1666074	0,5833037	13,54	0,0027
x3	2	155,8695630	77,9347815	1808,89	<,0001
x1*x2	4	1,3189037	0,3297259	7,65	0,0077
x1*x3	4	0,2820815	0,0705204	1,64	0,2561
x2*x3	4	0,1809481	0,0452370	1,05	0,4395

Source	DF	Type III SS	Mean Square	F Value	Pr > F
x1	2	2,0389407	1,0194704	23,66	0,0004
x2	2	1,1666074	0,5833037	13,54	0,0027
x3	2	155,8695630	77,9347815	1808,89	<,0001
x1*x2	4	1,3189037	0,3297259	7,65	0,0077
x1*x3	4	0,2820815	0,0705204	1,64	0,2561
x2*x3	4	0,1809481	0,0452370	1,05	0,4395



小结 (DX,Minitab,点线图学会了吗)

- **极差分析**的例子用到借助点线图(再在Design Expert中安排因素和互作)来进行表头设计
- 在“**例1_四因素2水平且部分互作_Minitab和DX**”中用到了借助Minitab和Design Expert(根据其提供的因素混杂信息表)来进行表头设计
- 在“**例3_三因素3水平且全部互作_Minitab和DX**”中用到了借助点线图(再在Design Expert中安排因素和互作)和Minitab来进行表头设计



正交设计的灵活运用

(1) 改造实验表：

并列法、赋闲法、部分追加法、裂区法、套表法

(2) 调整因素及其水平：

拟水平法、组合法、直积法

(3) 拟因素设计法



一、并列法



例1. 将2水平的列改造成4水平的列

例：用并列法将 $L_{16}(2^{15})$ 改造成 $L_{16}(4^1 \times 2^{12})$

任取两列再加上其交互列，由这三列组成一个四水平的新列。四个水平的对应法则如下：

$(1,1) \rightarrow 1; (1,2) \rightarrow 2; (2,1) \rightarrow 3; (2,2) \rightarrow 4$

即，将任取的两列之四个数字对，对应于四个水平。例如，取第1、2两列加上其交互列（第3列）组成一个四水平列，经过上述改造， $L_{16}(2^{15})$ 变成了 $L_{16}(4^1 \times 2^{12})$ ，这仍然是一张完全正交表。



并列过程

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1
1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2
1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1
2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1
2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1
2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1
2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2
1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1
1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2
2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2
2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1



$L_{16}(4^1 \times 2^{12})$

新列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
原列号	1,2,3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2
4	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1
5	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2
6	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1
7	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1
8	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2
9	3	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
10	3	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1
11	3	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1
12	3	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2
13	4	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1
14	4	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2
15	4	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2
16	4	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1



若要在2水平正交表中安排**若干个**4水平因子，那么可以对 $L_{16}(2^{15})$ 进行**多次**并列

在将第1、2、3列改造成一个4水平列后，可再用另外三列改造成一个4水平列，只要所选的两列及其交互列不是第1、2、3列即可

如选第4与第8列及其交互列（第12列），按前面所述方法也可以将其改造成4水平列，则得到 $L_{16}(4^2 \times 2^9)$

同样方法还可将第5、10、15（5,10列的交互列）三列也改造成4水平列，则得到 $L_{16}(4^3 \times 2^6)$

若再将第6、11、13（6,11列的交互列）三列改造成4水平列，那么可得到 $L_{16}(4^4 \times 2^3)$

若再将第7、9、14（7,9列的交互列）三列改造成4水平列，那么可得到 $L_{16}(4^5)$



即，对 $L_{16}(2^{15})$ 可以通过多次并列法获得如下的正交表

$$L_{16}(4^1 \times 2^{12})$$

$$L_{16}(4^2 \times 2^9)$$

$$L_{16}(4^3 \times 2^6)$$

$$L_{16}(4^4 \times 2^3)$$

$$L_{16}(4^5)$$



$L_{16}(4^1 \times 2^{12})$

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2
1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	2
2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1
2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1
2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2	2
3	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	2
3	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1
3	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1
3	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2	2
4	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1
4	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	2
4	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	2
4	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1	1



$L_{16}(4^2 \times 2^9)$

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
1	3	2	2	2	1	1	1	2	2	2	2	2
1	4	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	1	2	2	1	2	2	2	2
2	2	1	2	2	2	1	1	2	1	1	1	1
2	3	2	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1
2	4	2	1	1	2	1	1	1	1	2	2	2
3	1	2	1	2	2	1	2	2	2	1	2	2
3	2	2	1	2	1	2	1	1	1	2	1	1
3	3	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
3	4	1	2	1	1	2	1	2	1	2	1	2
4	1	2	2	1	2	2	1	2	2	2	1	1
4	2	2	2	1	1	1	2	1	1	1	2	2
4	3	1	1	2	2	2	1	1	1	1	2	2
4	4	1	1	2	1	1	2	2	2	2	1	1



$$L_{16}(4^3 \times 2^6)$$

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	2	1	1	2	2	2	2	2
1	3	3	2	2	1	1	2	2	2
1	4	4	2	2	2	2	1	1	1
2	1	2	2	2	1	2	1	2	2
2	2	1	2	2	2	1	2	1	1
2	3	4	1	1	1	2	2	1	1
2	4	3	1	1	2	1	1	1	2
3	1	3	1	2	2	2	2	2	1
3	2	4	1	2	1	1	1	1	2
3	3	1	2	1	2	2	1	2	2
3	4	2	2	1	1	1	2	1	1
4	1	4	2	1	2	1	2	2	2
4	2	3	2	1	1	2	1	1	1
4	3	2	1	2	2	1	1	1	1
4	4	1	1	2	1	2	2	2	2



$$L_{16}(4^4 \times 2^3)$$

1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	2	2	2	1	2	2
1	3	3	3	3	2	1	2
1	4	4	4	4	2	2	1
2	1	2	3	3	2	2	1
2	2	1	4	4	2	1	2
2	3	4	1	1	1	2	2
2	4	3	2	2	1	1	1
3	1	3	4	4	1	2	2
3	2	4	3	3	1	1	1
3	3	1	2	2	2	2	1
3	4	2	1	1	2	1	2
4	1	4	2	2	2	1	2
4	2	3	1	2	2	2	1
4	3	2	4	4	1	1	1
4	4	1	3	3	1	2	2



$L_{16}(4^5)$

1	1	1	1	1
1	2	2	2	2
1	3	3	3	3
1	4	4	4	4
2	1	2	3	4
2	2	1	4	3
2	3	4	1	2
2	4	3	2	1
3	1	3	4	2
3	2	4	3	1
3	3	1	2	4
3	4	2	1	3
4	1	4	2	3
4	2	3	1	4
4	3	2	4	1
4	4	1	3	2



例2. 将2水平的列改造成8水平列的方法

将 $L_{16}(2^{15})$ 改造成具有一个8水平列的正交表 $L_{16}(8^1 \times 2^8)$ 。具体方法：

对 $L_{16}(4^1 \times 2^{12})$ 继续用并列法，将它的第1、2列的八个数字对，对应于8个水平。再将它们的交互作用所对应的三列去掉即得

这三列即 $L_{16}(4^1 \times 2^{12})$ 的第3、4、5列，也就是原始表 $L_{16}(2^{15})$ 中的第1,2,3列与第4列之间的交互列，也就是 $L_{16}(2^{15})$ 的第5、6、7列)



$(1,1) \rightarrow 1;$
 $(1,2) \rightarrow 2;$
 $(2,1) \rightarrow 3;$
 $(2,2) \rightarrow 4;$
 $(3,1) \rightarrow 5;$
 $(3,2) \rightarrow 6;$
 $(4,1) \rightarrow 7;$
 $(4,2) \rightarrow 8$

新列号	1	2
原列号	1,2,3	4
1	1	1
2	1	1
3	1	2
4	1	2
5	2	1
6	2	1
7	2	2
8	2	2
9	3	1
10	3	1
11	3	2
12	3	2
13	4	1
14	4	1
15	4	2
16	4	2



$L_{16}(8^1 \times 2^8)$

1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	2	2	2	2	2	2	2
2	1	1	1	1	2	2	2	2
2	2	2	2	2	1	1	1	1
3	1	1	2	2	1	1	2	2
3	2	2	1	1	2	2	1	1
4	1	1	2	2	2	2	1	1
4	2	2	1	1	1	1	2	2
5	1	2	1	2	1	2	1	2
5	2	1	2	1	2	1	2	1
6	1	2	1	2	2	1	2	1
6	2	1	2	1	1	2	1	2
7	1	2	2	1	1	2	2	1
7	2	1	1	2	2	1	1	2
8	1	2	2	1	2	1	1	2
8	2	1	1	2	1	2	2	1



例3. 将 $L_{27}(3^{13})$ 改造成具有一个9水平列的正交表

具体方法：

(1,1)→1;
(1,2)→2;
(1,3)→3;
(2,1)→4;
(2,2)→5;
(2,3)→6;
(3,1)→7;
(3,2)→8;
(3,3)→9

- 任取两列（比如取第1、2列）将他们的9个数字对，对应于9个水平。并将这两列的交互列（第1、2列的交互列即是第3、4列）去掉，即得 $L_{27}(9^1 \times 3^9)$
- 由此法得到的正交表的自由度等于各列自由度之和，所以它们仍然具有平方和分解式，4水平列的平方和可以用2水平正交表中构成它们的列的平方和相加得到



$L_{27}(9^1 \times 3^9)$

1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2	1	1	1	2	2	2	3	3	3
2	2	2	2	3	3	3	1	1	1
2	3	3	3	1	1	1	2	2	2
3	1	1	1	3	3	3	2	2	2
3	2	2	2	1	1	1	3	3	3
3	3	3	3	2	2	2	1	1	1
4	1	2	3	1	2	3	1	2	3
4	2	3	1	2	3	1	2	3	1
4	3	1	2	3	1	2	3	1	2
5	1	2	3	2	3	1	3	1	2
5	2	3	1	3	1	2	1	2	3
5	3	1	2	1	2	3	2	3	1
6	1	2	3	3	1	2	2	3	1
6	2	3	1	1	2	3	3	1	2
6	3	1	2	2	3	1	1	2	3
7	1	3	2	1	3	2	1	3	2
7	2	1	3	2	1	3	2	1	3
7	3	2	1	3	2	1	3	2	1
8	1	3	2	2	1	3	3	2	1
8	2	1	3	3	2	1	1	3	2
8	3	2	1	1	3	2	2	1	3
9	1	3	2	3	2	1	2	1	3
9	2	1	3	1	3	2	3	2	1
9	3	2	1	2	1	3	1	3	2



二、拟水平法

	因素		
	A(操作方式)	B(班组)	C(产品种类)
水平	1	1	1
	2	2	2
		3	3

$$L_{18}(2 \times 3^7) \text{ or } L_9(3^4)$$



拟水平的 $L_9(3^4)$

	A	B	C	空列
No.1	1	1	1	1
No.2	1	2	2	2
No.3	1	3	3	3
No.4	2	1	2	3
No.5	2	2	3	1
No.6	2	3	1	2
No.7	1	1	3	2
No.8	1	2	1	3
No.9	1	3	2	1

通常把需要重点考察的水平，作为拟水平的实际值；
所拟的因素和水平一般不超过2个为宜



三、拟因素法

试验设计方法，赵选民，
2006，p89-92

试验设计与及其优化，
任露泉，2009，p40-45